



# Metodologías para Generar Oscilaciones Periódicas en la Rueda de Inercia: Comparación Teórica y Experimental

A. Sosa\*, R. Iriarte\*\*, L. Fridman\*\*\*

\*Estudiante del Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería Eléctrica  
Universidad Nacional Autónoma de México, México, D.F.

\*\*Estudiante de doctorado en Comunicaciones y Electrónica  
Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital CITEDI-IPN, Tijuana BC

\*\*\*Departamento de Control, Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional Autónoma de México, México, D.F.

Email: asosa.unam@gmail.com\*, ririarte@citedi.mx\*\*, lfridman@servidor.unam.mx\*\*\*

**Resumen**— Se presenta una comparación entre el controlador por restricciones holonómicas virtuales y el controlador de dos relevadores diseñados previamente para generar oscilaciones en un sistema mecánico subactuado de dos grados de libertad, la rueda de inercia. El objetivo de ambos controladores es generar un movimiento oscilatorio con una frecuencia y una amplitud predeterminadas sobre la variable subactuada del sistema, la posición del péndulo, alrededor del punto de equilibrio inestable. Las aportaciones de este trabajo son analizar el desempeño de cada controlador a partir de resultados de simulación y adicionalmente hacer una comparación experimental entre la linealización a través del Jacobiano y la linealización por realimentación de estados para el controlador de dos relevadores.

**Palabras clave:** Oscilaciones, Jacobiano, linealización por realimentación, controlador de dos relevadores, restricciones holonómicas.

## I. INTRODUCCIÓN

La generación de oscilaciones es un problema que ha sido abordado en el pasado desde diferentes enfoques de control, como redes neuronales recurrentes (Jouffroy, 2007) y pasividad (Freidovich, Shiriaev et al, 2009) entre otros. Estos desarrollos teóricos han encontrado aplicaciones en varios tipos de sistemas, por ejemplo en sistemas eléctricos (Kaster y Pagano, 2005), y en robots bípedos (Narioka et al, 2009). El enfoque de este trabajo es aplicar dos distintos controladores para generar oscilaciones en la rueda de inercia del equipo Mechatronic Kit de Quanser®, un miembro más de la extensa familia de los péndulos. La rueda de inercia es un sistema mecánico con dos grados de libertad, una rueda inercial (rotor) actuada directamente por un motor de corriente directa y un péndulo el cual carece de un actuador. Se busca lograr que el péndulo, el elemento subactuado del sistema, oscile alrededor del punto de equilibrio inestable, i.e. el péndulo en la posición vertical superior. Adicionalmente se requiere que la frecuencia

y la amplitud de las oscilaciones se puedan escoger de manera arbitraria e independiente la una de la otra.

El primer controlador a considerar es el controlador por restricciones holonómicas virtuales (CRHV) (Freidovich et. al, 2009) el cual propone acoplar la dinámica del péndulo a la del rotor, convirtiendo así al problema a resolver en uno problema de seguimiento de las trayectorias periódicas deseadas del péndulo. También se analiza el controlador de dos relevadores (C2R) (Aguilar et. al, 2009) el cual, a partir de la suposición de que la planta presenta las propiedades de un filtro paso bajas, aprovecha el contenido armónico del efecto relevador para generar las oscilaciones objetivo. Las aportaciones principales de este trabajo son dos: una, la comparación directa entre ambos controladores a partir de su desempeño teórico en simulaciones y dos, la comparación entre dos métodos de linealización, por el Jacobiano y por realimentación, basada en los resultados experimentales obtenidos en un equipo mecatrónico prototipo, el Mechatronics Kit de Quanser®.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera: el modelo matemático del sistema junto con el planteamiento formal del problema a resolver se introducen en la Sección II; posteriormente se presentan dos distintas maneras de linealizarlo en la Sección III. El CRHV y el C2R se reformulan en la Sección IV y V respectivamente. La Sección VI se dedica a comparar el desempeño de ambos controladores con base en los resultados de distintas simulaciones. Se prosigue a mostrar algunos resultados experimentales del controlador de dos relevadores en la Sección VII. Finalmente la Sección VIII cierra este trabajo con algunas conclusiones y comentarios sobre trabajos a futuro.

## II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La dinámica de la rueda de inercia se describe (Aguilar et al, 2009; Freidovich, La Hera et al, 2009) por el siguiente modelo no lineal de orden  $n = 4$ :

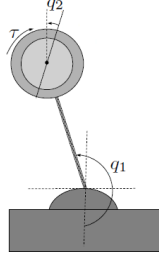


Figura 1. Diagrama de referencia para el modelado

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{q}_1 + J_2 \ddot{q}_2 + h \sin q_1 &= 0 \\ J_2 \ddot{q}_1 + J_2 \ddot{q}_2 &= \tau \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $q_1, q_2$  son la posición absoluta del péndulo y del rotor respectivamente medidas de acuerdo a la Figura 1,  $\tau$  es el par de control generado por el motor y  $J_1, J_2, h \in \mathbb{R} > 0$  son parámetros físicos del sistema.

La representación de (1) en el espacio de estados es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x) \tau \\ &= \begin{bmatrix} x_2 \\ -78.0291 \sin(x_1) \\ x_4 \\ 78.0291 \sin(x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -219.9180 \\ 0 \\ 40298.4720 \end{bmatrix} \tau \end{aligned} \quad (2)$$

siendo  $x = [q_1 \ \dot{q}_1 \ q_2 \ \dot{q}_2]^T$  el vector de estados y  $J_1 = 4.59695 \times 10^{-3}, J_2 = 2.495 \times 10^{-5}, h = 0.35481$  los parámetros físicos del sistema. Este sistema no lineal tiene dos puntos de equilibrio, uno estable para  $q_1 = 0$  y otro inestable para  $q_1 = \pi$ . El objetivo es entonces lograr un comportamiento oscilatorio del péndulo, el cual es subactuado, de amplitud  $\mathcal{A}$  [rad] y frecuencia  $\Omega$  [ $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ] alrededor de  $q_1 = \pi$ , i.e.,

$$q_1(t) \approx \mathcal{A} \sin(\Omega t) + \pi \quad (3)$$

Adicionalmente se requiere que la amplitud y frecuencia deseada se puedan elegir independientemente la una de la otra y de manera arbitraria.

### III. LINEALIZANDO EL MODELO MATEMÁTICO

En el análisis subsecuente se requerirá de una linealización del modelo no lineal de la planta (2); aquí se presentan dos distintas metodologías para cumplir con este requisito.

#### III-A. Linealización por el Jacobiano

Permite obtener fácilmente una *linealización local* alrededor de algún punto de equilibrio. Se tiene,

$$\Sigma_J : \begin{aligned} \dot{x} &= A_J x + B_J \tau \\ y &= q_1 \end{aligned}$$

donde

$$A_J = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{q_1=\pi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 77.6033 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_J = [0 \quad -219.918 \quad 0 \quad 40298.47]^T$$

#### III-B. Linealización parcial por realimentación

Se puede probar, utilizando paréntesis de Lie con la notación  $ad_f^k g(x) = [f, ad_f^{k-1} g(x)]$ , que la distribución

$$\Delta(x) = \text{span} \{g(x), ad_f g(x), ad_f^2 g(x)\}$$

no es involutiva sobre el espacio  $D_o \in \mathbb{R}^4$  donde evolucionan las trayectorias del sistema. Esto implica que este sistema no es linealizable exactamente por realimentación sino sólo linealizable parcialmente. Por esta razón se recurre al algoritmo de linealización por realimentación de (Grizzle et al, 2005) el cual permite linealizar  $n - 1$  estados de sistemas subactuados como la rueda de inercia. Se define la ley de realimentación

$$\tau = J_2 (1 - J_1^{-1} J_2) v - J_1^{-1} J_2 h \sin q_1$$

y el momento generalizado conjugado respecto a  $q_1$

$$\sigma = J_1 \dot{q}_1 + J_2 \dot{q}_2$$

para llevar al sistema a su forma normal modificada

$$\dot{\sigma} = -h \sin q_1$$

$$\dot{q}_1 = J_1^{-1} \sigma - J_1^{-1} J_2 \dot{q}_2$$

$$\ddot{q}_2 = v$$

Posteriormente se establece la salida

$$y = \zeta = K p_1 + \sigma$$

$$= K (q_1 - \pi + J_1^{-1} J_2 q_2) + J_1 \dot{q}_1 + J_2 \dot{q}_2$$

la cual produce un sistema de fase mínima para una constante  $K \in \mathbb{R} > 0$ . Su tercera derivada

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta} &= \underbrace{J_1^{-1} J_2 h \cos q_1}_{f_2(q_1)} \\ &+ \underbrace{J_1^{-1} h \cos q_1 (h \sin q_1 - K \dot{q}_1) + h \sin q_1 \dot{q}_1^2 v}_{f_1(q_1, \dot{q}_1)} \end{aligned}$$

indica que el sistema realimentado tiene un grado relativo  $\rho = 3$  y una dinámica cero,  $p_1$ , unidimensional. Entonces, asumiendo que  $f_2(q_1)$  es invertible, la ley de control

$$v = [u - a_0 \zeta - a_1 \dot{\zeta} - a_2 \ddot{\zeta} - f_1(q_1, \dot{q}_1)] / f_2(q_1) \quad (4)$$

donde  $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} > 0$  transforma el sistema (1) en

$$\Sigma_F : \begin{aligned} \dot{x}_F &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & 0 \\ J_1^{-1} & 0 & 0 & -K J_1^{-1} \end{bmatrix} x_F \\ &+ [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T u \\ y &= \zeta \end{aligned}$$

para el vector de estados  $x_F = [\zeta \ \dot{\zeta} \ \ddot{\zeta} \ p_1]^T$ .

#### IV. CONTROLADOR POR RESTRICCIONES HOLONÓMICAS VIRTUALES

Una manera de resolver el problema planteado en la Sección II se aborda detalladamente en (Freidovich, La Hera et al, 2009) y se basa en acoplar, a través del control, la dinámica del rotor con la del péndulo. Si se logra esto, la tarea de generar oscilaciones en  $q_1$  se reduce a un problema de seguimiento de trayectorias para  $q_2$ , la cual es la variable directamente actuada del sistema. Para conveniencia del lector se presenta el resumen de esta metodología en esta Sección.

El primer paso es proponer una restricción holonómica virtual; por fines de simplicidad,

$$q_2 = \mathcal{H}(q_1) \triangleq kq_1 + \mathcal{H}_0 \quad (5)$$

donde  $k \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{H}_0 = -k\bar{q}_1$  y  $\bar{q}_1 \in \{0, \pi\}$ . Si se proyecta (2) bajo  $\mathcal{H}$  se obtiene la dinámica reducida equivalente de la rueda de inercia

$$(J_1 + kJ_2)\ddot{q}_1 + h \sin q_1 = 0 \quad (6)$$

La dinámica deseada,  $q_{1*}(t)$ , que cumple con la dinámica objetivo (3) se define como la solución única de (6). Se puede observar que  $k$  es el único parámetro libre de (6); al cambiar ésta también cambia  $q_{1*}(t)$ . Por lo tanto,  $k$  no se puede escoger arbitrariamente, debe satisfacer

$$k = \left( -\frac{\Omega^{-2}h}{2C^2(0, \mathcal{A})} \right)$$

una relación que depende tanto de  $\Omega$  como de  $\mathcal{A}$ , donde

$$\Omega^{-1} = C(\bar{q}_1, \mathcal{A}) \sqrt{\frac{2|J_1 + kJ_2|}{h}}$$

$$C(\bar{q}_1, \mathcal{A}) \triangleq \int_{\bar{q}_1 - \mathcal{A}}^{\bar{q}_1 + \mathcal{A}} \frac{d\delta}{\sqrt{|\cos \delta - \cos \bar{q}_1 - \mathcal{A}|}}$$

Por otro lado, además de garantizar la convergencia de las trayectorias del sistema a  $q_{1*}(t)$ , el CRHV también debe conservar el momento del sistema en cada oscilación, de lo contrario no es posible preservar la estabilidad orbital. Para esto, es necesario garantizar

$$E(q_1(t), \dot{q}_1(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} E_0$$

$$E(q_1, \dot{q}_1) = \frac{(J_1 + kJ_2)}{2} \dot{q}_1^2 + h(1 - \cos q_1)$$

$$E_0 \triangleq E(\mathcal{A} + \bar{q}_1, 0) = h(1 - \cos \mathcal{A} + \bar{q}_1)$$

Para lograr tanto seguimiento de  $q_{1*}(t)$  como conservación de momento se define una nueva restricción

$$\mathcal{G} = (q_2(t) - \mathcal{H}_0) - k(q_1(t) - \pi)$$

que representa la desviación de la restricción holonómica (5). Esto permite aplicar una entrada linealizante,

$$\tau = -\frac{J_2}{J_1 + kJ_2} ((h + kh) \sin q_1 + (J_2 - J_1) v)$$

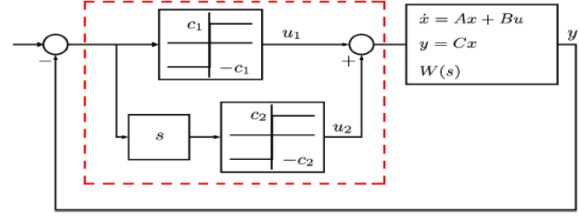


Figura 2. Esquema de control con dos relevadores

que transforma el sistema a

$$\Sigma_F : \begin{aligned} \dot{x}_H &= A_H x_H + B_H(t)v \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E - E_0 \\ \mathcal{G} \\ \dot{\mathcal{G}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -J_2 \dot{q}_{1*}(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \end{aligned}$$

Finalmente, la realimentación de la ley de control

$$v = -[-J_2 \dot{q}_1 \quad 0 \quad 1] R(t) [E - E_0 \quad \mathcal{G} \quad \dot{\mathcal{G}}]^T$$

asegura que la trayectoria deseada,  $q_{1*}(t)$ , es una solución orbitalmente estable del sistema en lazo cerrado para la solución,  $R(t)$ , de la ecuación diferencial periódica de Riccati

$$\dot{R} + 2\delta R + A^T R + R A + G = R B(t) B^T(t) R$$

para cualquier  $G = G^T \in \mathbb{R}^3 \geq 0$ .

#### V. CONTROLADOR DE DOS RELEVADORES

Otra alternativa para generar oscilaciones en la rueda de inercia utilizando dos relevadores se introdujo en (Aguilar et al, 2009). El esquema de control empleado en este caso se muestra en la Figura 2. La idea general es resolver la ecuación de balance armónico para la Función Descriptiva de los dos relevadores y la respuesta en frecuencia del modelo linealizado de la planta. A manera de resumen, se describe el diseño de las dos ganancias de este controlador. Se determina la Función Descriptiva del C2R

$$u_{2R} = -c_1 \text{sgn}(y) - c_2 \text{sgn}(\dot{y})$$

Asumiendo  $y(t) = \mathcal{A} \sin \Omega t$ , su Función Descriptiva es

$$N = \frac{4}{\pi \mathcal{A}} (c_1 + j c_2) \quad (7)$$

La ecuación de balance armónico

$$W(j\Omega) = \frac{-1}{N} \quad (8)$$

se resuelve de la siguiente manera:

- Se fija la taza

$$\xi = \frac{c_2}{c_1} = -\frac{\text{Im}\{W(j\Omega)\}}{\text{Re}\{W(j\Omega)\}}$$

- Se sustituye (7) en (8) para obtener

$$W(j\Omega) = -\frac{\pi \mathcal{A}}{4(c_1 + j c_2)}$$

$$|W(j\Omega)| = \mathcal{A} \frac{\pi}{4|c_1 + j c_2|}$$

- Finalmente los valores de  $c_1, c_2$  se calculan como

$$c_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \frac{A}{|W(j\Omega)|} \left( \sqrt{1 + \xi^2} \right)^{-1} & \text{si } W(j\Omega) \geq 0 \\ -\frac{\pi}{4} \frac{A}{|W(j\Omega)|} \left( \sqrt{1 + \xi^2} \right)^{-1} & \text{si } W(j\Omega) < 0 \end{cases}$$

$$c_2 = \xi \cdot c_1$$

## VI. SIMULACIONES

### VI-A. Controlador de Dos Relevadores

En esta Sección se analizarán los efectos de utilizar la linealización por el Jacobiano y la linealización por realimentación desarrollados en la Sección III en el esquema del controlador de dos relevadores ilustrado en la Figura 2. Para el caso del sistema  $\Sigma_J$ , primero se realimentaron los estados del sistema para ubicar sus polos en

$$\lambda_{\Sigma_J} = \{-15, -9, -2, -4\}$$

Luego, se tomaron como parámetros deseados

$$\mathcal{A}_d = 0.2 \text{ [rad]}, \quad \Omega_d = 4\pi \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (9)$$

La evolución del péndulo se muestra en la Figura 3 para la condición inicial

$$x_0 = [3.0 \quad 1.0 \quad 0.0 \quad 0.0]^T$$

La oscilación resultante tiene como parámetros

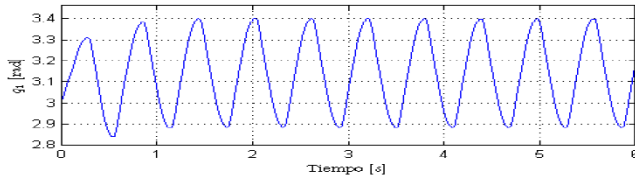


Figura 3. Oscilación simulada de  $q_1$  utilizando  $\Sigma_J, \mathcal{A}_d = 0.2$

$$\mathcal{A}_s = 0.2574 \text{ [rad]}, \quad \Omega_s = 3.3932\pi \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

No obstante, si se incrementa la amplitud de la oscilación deseada, e.g.,

$$\mathcal{A}_d = 2 \text{ [rad]}, \quad \Omega_s = 4\pi \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (10)$$

la Figura 4 muestra un comportamiento irregular y poco

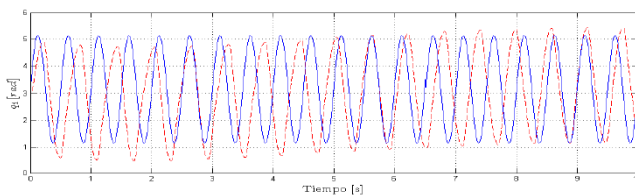


Figura 4. Oscilación deseada (azul) y simulada (roja) si  $\mathcal{A}_d = 2$  simétrico comparado con el caso anterior de baja amplitud, lo cual muestra las limitaciones de una linealización

local. En la Tabla I se recopilan los datos de éstas y otras oscilaciones. También se muestra que la señal de control es periódica y, tal como se ilustra en la Figura 5, de la misma frecuencia que la frecuencia deseada  $\Omega_d$ . Por otro lado, se incorporó  $\Sigma_F$  al esquema de la

$\mathcal{A}_d$ [rad]	$\Omega_d$ $\left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$	$c_1$	$c_2$	$\mathcal{A}_s$ [rad]	$\Omega_s$ $\left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$
0.2	$4\pi$	17.762	43.185	0.257	$3.393\pi$
0.2	$8\pi$	-50.316	103.748	0.249	$5.692\pi$
0.2	$12\pi$	-164.897	160.453	0.208	$10.165\pi$
2	$4\pi$	177.622	431.852	2.146	$3.397\pi$
2	$8\pi$	-503.168	1037.48	2.183	$6.138\pi$
2	$12\pi$	-1648.97	1604.53	1.993	$10.55\pi$

TABLA I

PARÁMETROS SIMULADOS DEL C2R CALCULADOS PARA  $\Sigma_J$

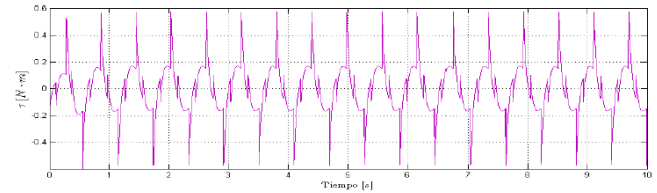


Figura 5. Par de control para la oscilación deseada 9 con  $\Sigma_J$

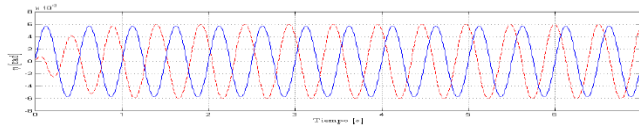
Figura 2, procurando estabilidad con los parámetros  $a_0 = 350, a_1 = 155, a_2 = 22, K = 0.0001$ . Se analizó la misma oscilación deseada (9) para  $q_1$ . La amplitud deseada de la salida  $\zeta$  en función de la amplitud deseada de  $q_1$  es

$$\mathcal{A}_{\zeta_d} = \frac{\mathcal{A}_{q_1_d} h}{\Omega_d \sqrt{1 - \frac{K}{J_1^2 \Omega_d^2 + K^2}}}$$

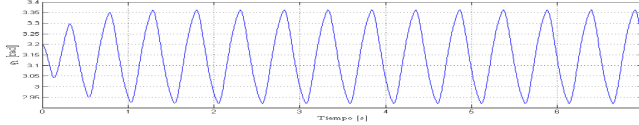
y se toma  $\Omega_\zeta = \Omega_d$ . La oscilación simulada resultante del péndulo y de  $\zeta$  se muestran en la Figura 6 junto con el par de control correspondiente en la Figura 7. Los datos de la Tabla II demuestran que la precisión de las oscilaciones aumenta cuando se utiliza esta linealización parcial sobre la linealización por el Jacobiano. No obstante, debido a la transformación (4), no es posible generar oscilaciones de amplitud arbitrariamente grande.

### VI-B. Controlador por Restricciones Holonómicas

Las mismas oscilaciones previamente simuladas con el C2R se simularon también utilizando el CRHV para fines de comparación. La Figura 8 muestra la evolución del péndulo para la oscilación deseada (10). La Tabla III resalta inmediatamente la alta precisión de este controlador para esta oscilación y en general. Finalmente, en la Figura 9 se observa que la señal de control para el CRHV es continua y suave.



(a) Oscilación deseada de la salida  $\zeta$  (azul) y simulada (roja)



(b) Oscilación asociada del péndulo

Figura 6. Relación entre la salida  $\zeta$  y la posición del péndulo

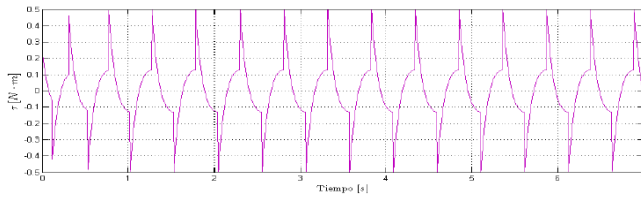


Figura 7. Par de control para la oscilación deseada (9) con  $\Sigma_F$

$A_d$ [rad]	$\Omega_d$ [ $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ]	$c_1$	$c_2$	$A_s$ [rad]	$\Omega_s$ [ $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ]
0.2	$4\pi$	14.07	0.164	0.221	$3.921\pi$
0.2	$8\pi$	30.15	26.66	0.197	$7.972\pi$
0.2	$12\pi$	45.78	70.69	0.188	$12.14\pi$
2	$4\pi$	140.70	1.644	*	*
2	$8\pi$	301.54	266.65	*	*
2	$12\pi$	457.85	706.92	*	*

TABLA II  
OSILACIONES SIMULADAS UTILIZANDO  $\Sigma_F$

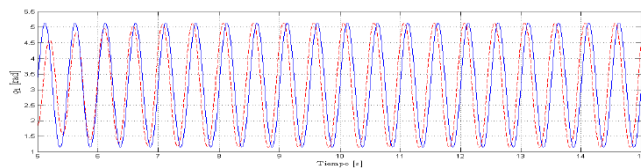


Figura 8. CRHV: Oscilación deseada (azul) vs. simulada (roja)

$A_d$ [rad]	$\Omega_d$ [ $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ]	$k$	$A_s$ [rad]	$\Omega_s$ [ $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ]
0.2	$4\pi$	-272.8554	0.199997	$4.00\pi$
0.2	$8\pi$	-205.6517	0.199997	$8.00\pi$
0.2	$12\pi$	-193.2066	0.200003	$12.0008\pi$
2	$4\pi$	-234.2444	1.9999	$4.0005\pi$
2	$8\pi$	-195.999	1.999958	$8.0089\pi$
2	$12\pi$	-188.9165	1.99979	$12.012\pi$

TABLA III  
PARÁMETROS SIMULADOS DEL CRHV

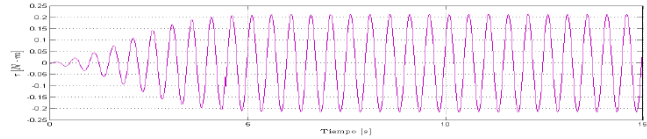


Figura 9. Señal de control del CRHV

## VII. PRUEBAS EXPERIMENTALES

Se llevó a cabo la implementación del controlador de dos relevadores utilizando una tarjeta de adquisición de datos dSPACE1103, con un tiempo de muestreo de 10 [ns], en un entorno computacional basado en MATLAB. Se utilizó el método de integración de Euler para resolver numéricamente las ecuaciones pertinentes. El motor de corriente directa (Pittman<sup>®</sup> LO-COG 8X22, 24 [V]) se controló a través de una señal de corriente generada por la dSPACE1103 a partir un sistema de modulación de pulso con un ciclo de trabajo fijo a una frecuencia de 10 [kHz]. La primera prueba experimental que se realizó en el MKT incorporó al sistema  $\Sigma_J$  como la planta lineal del esquema de control general (Figura 2). Se propuso generar dos oscilaciones distintas con este método: una de alta amplitud y baja frecuencia, la otra de alta frecuencia y baja amplitud. Los parámetros de estas oscilaciones deseadas junto con los resultados experimentales se presentan en la Tabla IV. La posición

$A_d$ [rad]	$\Omega_d$ [ $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ]	$c_1$	$c_2$	$A_r$ [rad]	$\Omega_r$ [ $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ]
0.01	$\pi$	1.218	-1.633	0.0095	$2.7\pi$
0.025	$5\pi$	0.652	7.399	0.028	$0.8\pi$

TABLA IV  
OSILACIONES EXPERIMENTALES UTILIZANDO  $\Sigma_J$

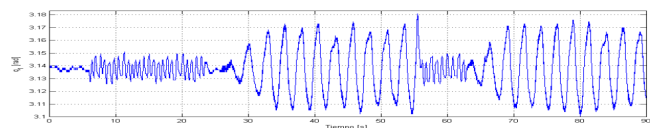


Figura 10. Oscilación experimental utilizando  $\Sigma_J$

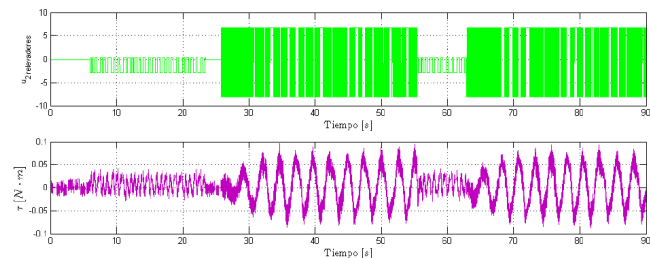


Figura 11. Señales de control experimentales utilizando  $\Sigma_J$

del péndulo y las señales de control de esta prueba

se ilustran en la Figura 10 y 11 respectivamente. Por otro lado, también se utilizó el sistema  $\Sigma_F$  en los experimentos con el mismo propósito de generar dos distintos tipos de oscilaciones. La comparación entre los datos teóricos y los experimentales se presentan en la Tabla V. La evolución de  $\zeta$  y del péndulo se muestra en la Figura 12. Finalmente, la Figura 13 ilustra el comportamiento del control a lo largo del tiempo.

$\mathcal{A}_d$ [rad]	$\Omega_d$ [ $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ]	$c_1$	$c_2$	$\mathcal{A}_r$ [rad]	$\Omega_r$ [ $\frac{\text{rad}}{\text{r}}$ ]
0.0185	$7\pi$	2.424	1.702	0.0186	$3.663\pi$
0.042	$3\pi$	2.041	-0.794	0.0556	$1.768\pi$

TABLA V  
OSCILACIONES EXPERIMENTALES UTILIZANDO  $\Sigma_F$

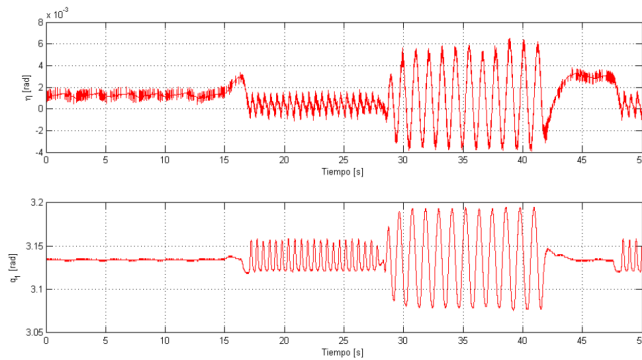


Figura 12. Oscilación experimental utilizando  $\Sigma_F$

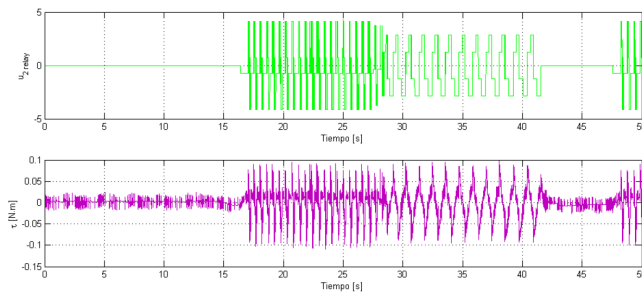


Figura 13. Señales de control experimentales utilizando  $\Sigma_F$

## VIII. CONCLUSIONES

Se abordó el problema de generar oscilaciones periódicas en la Rueda de Inercia, un sistema mecánico subactuado. Se emplearon dos distintas técnicas de control para resolver este problema: un controlador de estructura variable, específicamente el controlador de dos relevadores, y un controlador basado en restricciones holonómicas virtuales. Se llevó a cabo comparación de los resultados teóricos de estos dos controladores y a partir de ésta se puede concluir:

- El controlador de dos relevadores:
  - es eficiente en términos de gasto de control.
  - su precisión depende fuertemente del tipo de linealización que se utilice.
  - resulta sencillo calcular y ajustar  $c_1, c_2$ .
  - no se presenta el fenómeno de chattering
  - la convergencia a los ciclos límites es rápida.
- El CRHV:
  - tiene una precisión excelente, el error en todos los casos analizados es prácticamente nulo.
  - la señal de control es suave.
  - acepta condiciones iniciales arbitrarias.
  - hay libertad para escoger la restricción holonómica.

También se implementó el C2R bajo dos distintas circunstancias: linealizando el modelo matemático por medio del Jacobiano y por realimentación de estados. La comparación de los resultados experimentales y las simulaciones correspondientes arroja que la linealización parcial por realimentación de estados es claramente superior; ofrece una mejor precisión y no exige un mayor gasto de control para generar las oscilaciones e inclusive en algunos casos el gasto es menor (Figura 5 vs. 7).

A partir de estos resultados alentadores, se propone como trabajo a futuro aplicar esta teoría en sistemas eléctricos; la generación de oscilaciones en este caso se podría utilizar en el proceso de conversión de corriente directa a corriente alterna con el fin de diseñar un nuevo tipo de inversor.

## REFERENCIAS

- Aguilar, L. T., Boiko, I., Fridman, L. y Freidovich, L. (2009). Inducing Oscillations in an Inertia Wheel Pendulum via Two-Relays Controller: Theory and Experiments. *2009 American Control Conference*, St. Louis, MO, USA, Junio 10-12, 2009, 65 - 70.
- Freidovich, L. B., Shiriaev, A., Gomez-Estern, F., Gordillo, F. y Aracil, J. (2009). Modification via Averaging of Partial-Energyshaping Control for Orbital Stabilization: Cart-Pendulum Example. *International Journal of Control*. vol. 82, no. 9, 1582 - 1590.
- Freidovich, L. B., La Hera, P., Mettin, U., Robertsson, A., Shiriaev, A. y Johansson, R. (2009). Stable Periodic Motions of Inertia Wheel Pendulum via Virtual Holonomic Constrains. *Asian Journal of Control*, vol. 11, no. 5, 548 - 556.
- Grizzle, J. W., Moog, C. H. y Chevallereau, C. (2005). Nonlinear Control of Mechanical Systems with an Unactuated Cyclic Variable. *IEEE Transactions on Automatic Control*. vol. 50, no. 5, 559 - 576.
- Jouffroy, Guillaume (2007). Design of simple limit cycles with recurrent neural networks for oscillatory control. *Sixth International Conference on Machine Learning and Applications*, Cincinnati, Ohio, USA, 2007, 50 - 55.
- Kaster, M.S. y Pagano, D.J. (2005). Control of Autonomous Oscillations in Buck-based Inverters. *IEEE 36th Power Electronics Specialists Conference*, Recife, Brazil, 2005, 899 - 903.
- Narioka, K., Tsugawa, S. y Hosoda, K. (2009). 3D limit cycle walking of musculoskeletal humanoid robot with flat feet. *The 2009 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, St. Louis, MO, USA, 2009, 4676 - 4681.